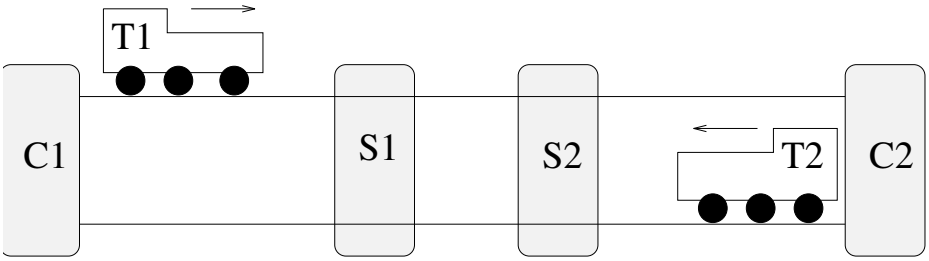
# Ragionamento Temporale basato su Vincoli

Prof. Alfonso Gerevini

## Ragionamento Temporale: un esempio




(1) *Durante il suo viaggio da* `C1` *a* `C2`, `T1` *si è fermato prima a* `S1` *e poi a* `S2`*:*

`at(T1,S1)` {*during*} `travel(T1,C1,C2)`
`at(T1,S2)` {*during*} `travel(T1,C1,C2)`

(2) `T2` *ha viaggiato in direzione opposta a* `T1`*:*

`at(T2,S1)` {*during*} `travel(T2,C2,C1)`
`at(T2,S2)` {*during*} `travel(T2,C2,C1)`

(3) `T2` *si è fermato prima a* `S2` *e poi a* `S1`*:*

`at(T1,S1)` {*before*} `at(T1,S2)`
`at(T2,S2)` {*before*} `at(T2,S1)`

(4) *Quando* `T2` *è arrivato a* `S1`, `T1` *era a* `S1`*:*

`at(T1,S1)` {overlaps, contains, finished-by} `at(T2,S1)`

(5) `T1` *e* `T2` *hanno lasciato* `S1` *in tempi diversi:*

`at(T1,S1)` $\mathbf{B} - \{$equal, finishes, finished-by$\}$ `at(T2,S1)`

(6) `T1` *è arrivato a* `C2` *prima che* `T2` *fosse arrivato a* `C1`*:*

`Travel(T1,C1,C2)` {b, m, o, s, d} `Travel(T2,C2,C1)`

(7) *Alla stazione* `S2` *non può sostare più di un treno contemporaneamente:*

`at(T2,S2)` {before, after} `at(T1,S2)`

## Principali Problemi di Ragionamento

- Determinare la **consistenza** (soddisfacibilità) dell' insieme di vincoli;

- Trovare uno **scenario consistente** (un ordinamento di tutte le variabili temporali che sia consistente con i vincoli forniti);

- Trovare una **soluzione** (una interpretazione di tutte le variabili temporali coinvolte che sia consistente con i vincoli forniti)

- Dedurre nuovi vincoli da quelli già conosciuti e, in particolare: colcolare la **relazione implicata più forte**

  - tra tutte le coppie di variabili (rete di vincoli *minima*);

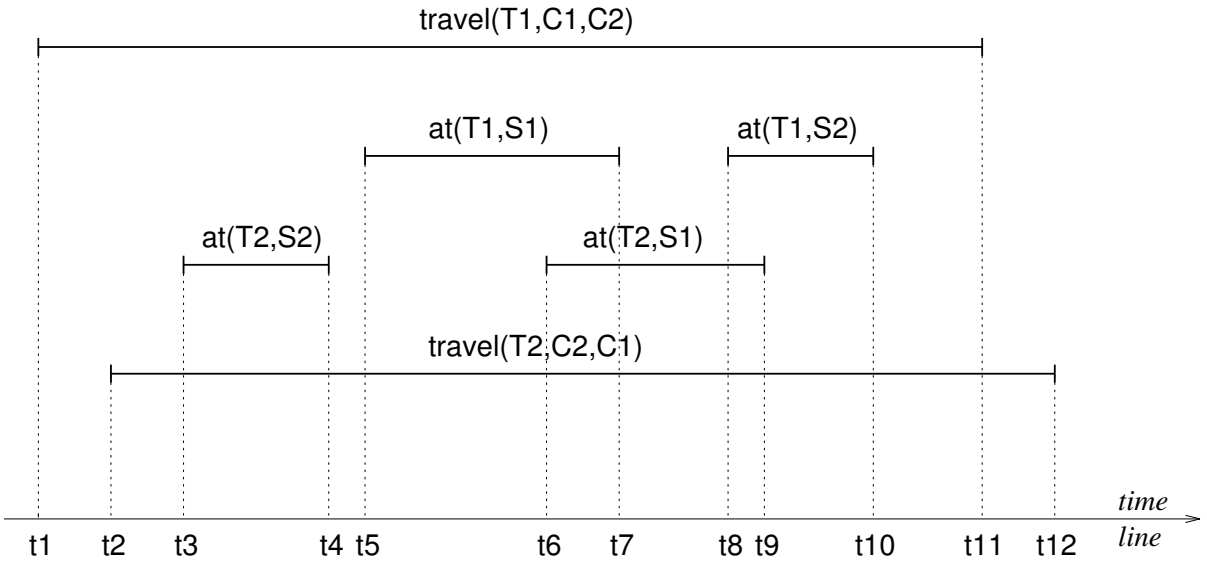
  - tra una particolare variabile e tutte le altre;

  - tra due specifiche variabili.

# Esempio

- I vincoli sono consistenti;

- Scenario e soluzione:




- Esempi di vincoli impliciti che sono deducibili:

`travel(T1,C1,C2)` **B** $-$ {b, a, m, mi} `travel(T2,C2,C1)`

`at(T2,S2)` {before} `at(T1,S2)`

# Algebra dei Punti (PA)

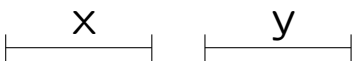
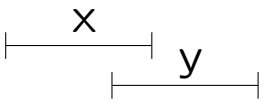
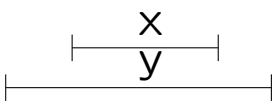
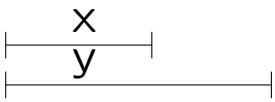
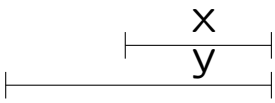
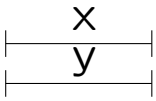
Insieme di relazioni derivato da tre relazioni base ( "$<$", "$>$" and "$=$" ) attraverso le operazioni di **inverso** (denotato con $\cdot^{\smile}$), **unione** ($\cup$), **intersezione** ($\cap$) e **composizione** ($\circ$):

$$
\begin{array}{lrcl}
\forall x, y: & x R^{\smile} y & \leftrightarrow & yRx \\
\forall x, y: & x(R \cup S)y & \leftrightarrow & xRy \ \vee \ xSy \\
\forall x, y: & x(R \cap S)y & \leftrightarrow & xRy \ \wedge \ xSy \\
\forall x, y: & x(R \circ S)y & \leftrightarrow & \exists z : (xRz) \ \wedge \ (zSy).
\end{array}
$$

| $\circ$ | $<$ | $>$ | $=$ | $\leq$ | $\geq$ | $\neq$ | ? |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $<$ | $<$ | ? | $<$ | $<$ | ? | ? | ? |
| $>$ | ? | $>$ | $>$ | ? | $>$ | ? | ? |
| $=$ | $<$ | $>$ | $=$ | $\leq$ | $\geq$ | $\neq$ | ? |
| $\leq$ | $<$ | ? | $\leq$ | $\leq$ | ? | ? | ? |
| $\geq$ | ? | $>$ | $\geq$ | ? | $\geq$ | ? | ? |
| $\neq$ | ? | ? | $\neq$ | ? | ? | ? | ? |
| ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? |

# Algebra degli Intervalli (IA)

Insieme di relazioni derivato da tredici relazioni base attraverso le operazioni di **inverso** (denotato con $\cdot^{\smile}$), **unione** ($\cup$), **intersezione** ($\cap$) e **composizione** ($\circ$):

| **Relaz.** | **Abbr.** | **Inv.** | **Significato** |
|---|---|---|---|
| x before y | b | bi |  |
| x meets y | m | mi |  |
| x overlaps y | o | oi |  |
| x during y | d | di |  |
| x starts y | s | si |  |
| x finishes y | f | fi |  |
| x equal y | eq | eq |  |

Notazione:
$(I\ before\ J)\ \vee\ (I\ meets\ J)\ \equiv\ I\ \{before, meets\}\ J.$

IA contiene $2^{13}$ relazioni.

# Composizione di relazioni in IA

**Relazioni di base** (o atomiche): attraverso una *tabella di transitività* di 13×13 elementi.

$$I\ \{overlaps\}\ J\ \circ\ J\ \{during\}\ K\ =$$

$$I\ \{overlaps, during, starts\}\ K$$

**Relazioni complesse**:

$$I\ \{r_{11}, ..., r_{1m}\}\ J\ \circ\ J\ \{r_{21}, ..., r_{2n}\}\ K\ =$$

$$I \bigcup_{i,j=1}^{i=m,j=n} \{r_{1i} \circ r_{2j}\}\ K$$

$(1 \leq m, n \leq 13)$

Esempio:

$$I\ \{during, finishes\}\ J\ \circ\ J\ \{before\}\ K\ =$$

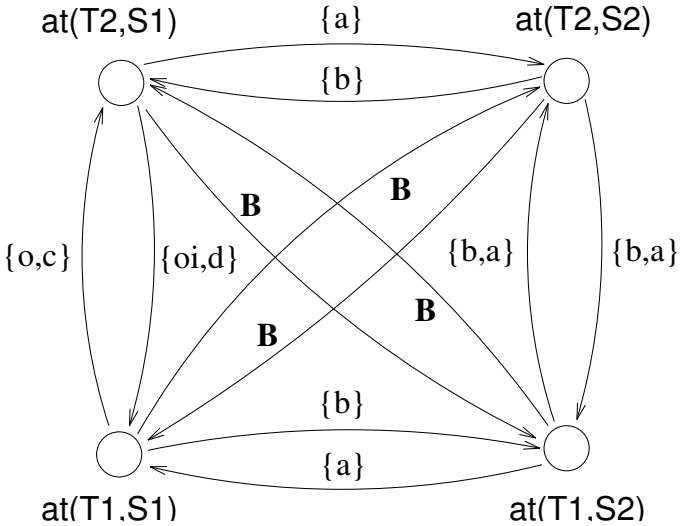
$$I\ \{before\}\ K$$

# Temporal Constraint Network (TCN)

- *temporal constraint network*: un insieme di vincoli può essere rappresentato attarverso una **rete di vincoli** (Montanari 1974).

- I vertici di una TCN rappresentano variabili-intervallo (o variabili-punto); gli archi sono etichettati dalle relazioni che valgono tra queste variabili.

- Una porzione della rete di vincoli temporali per l'esempio dei treni (**B** è la relazione "universale" = insime delle 13 relazioni di base):



# Proprietà Reti di Vincoli

- Due reti sono **equivalenti** se gli insiemi di vincoli rappresentati ammettono le stesse soluzioni (scenari consistenti).

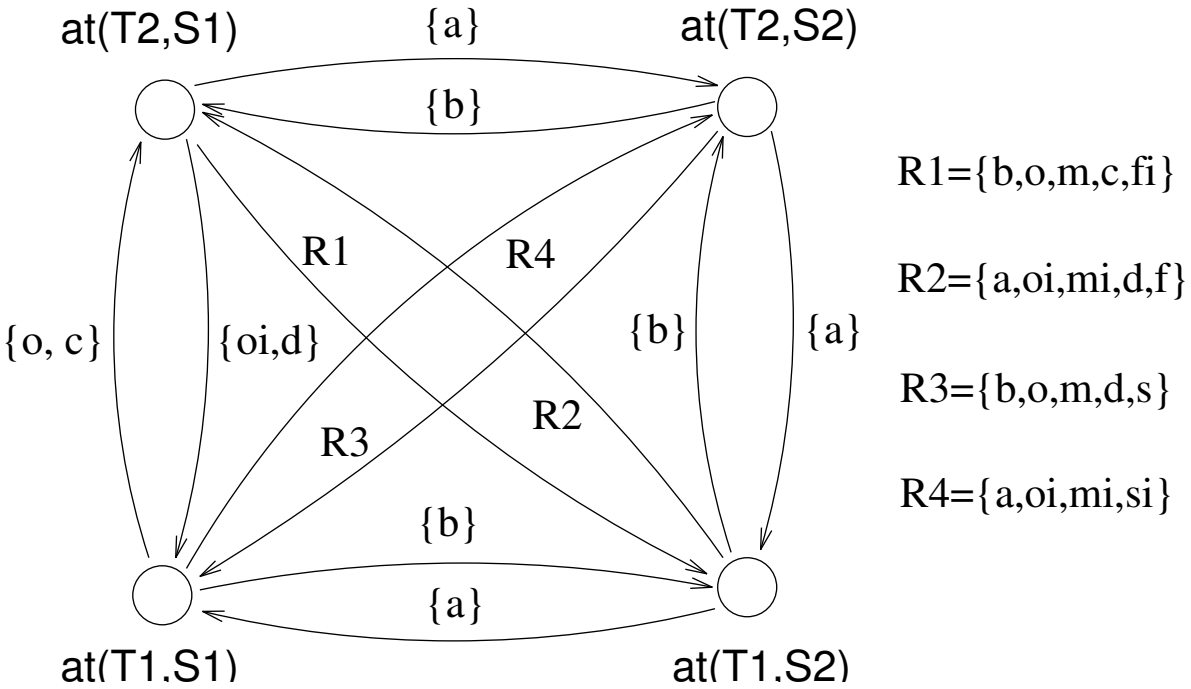
- Una relazione (vincolo) $xRy$ è **più forte** di $xRy$ se $xRy \models xSy$, ma $xSy \not\models xRy$ (es.: $x < y$ é piú forte di $x \leq y$).

- Una rete di vincoli $\mathcal{T}$ é più forte di una rete S se i vincoli di $\mathcal{T}$ sono piú forti dei vincoli di $\mathcal{S}$.

- Data una rete $\mathcal{T}$, la **rete minima** di $\mathcal{T}$ è la rete più forte equivalente a $\mathcal{T}$.

- In una rete minima per ogni coppia di valori $v1$ e $v2$ ammessi da un vincolo $xRy$ (per ogni relazione atomica $r$ in $R$), esiste una [?]?oluzione (scenario consistente) in cui $x = v1$ e $y = v2$ $(xry)$.

# Porzione Rete Minima per Esempio Treni



# Determinare la consistenza (soddifacibilitá)

- ISAT per IA è NP-completo $\Rightarrow$ non esiste un algoritmo completo polinomiale (se $P \neq NP$).

- PSAT per PA é polinomiale.

- ISAT é polinomiale per alcune sottoclassi di IA: *Algebra Semplice degli Intervalli (SIA)*, *Algebra ORD-Horn.*

**SIA** = 188 relazioni di IA che sono traducibili come congiunzioni di vincoli in PA tra estremità degli intervalli.

**ORD-Horn** = Relazioni di IA che sono traducibili come congiunzioni di disgiunzioni di vincoli in $\{=, \leq, \neq\}$, con *al massimo un disgiunto di tipo "$\leq$" o "$=$"*.

# Path-consistenza

- Una rete (o insieme di vincoli) $\mathcal{T}$ è *path consistente* se

$$\forall i, j, k \quad R_{ij} \subseteq R_{ik} \circ R_{kj}$$

  $R_{ij}$ = relazione tra $i$ e $j$ in $\mathcal{T}$.

- Se una rete (insieme) di vincoli è path-consistente, allora tutte le sottoreti (sottoinsiemi) che coinvolgono tre vertici (variabili) sono minime(i).

- Data una rete (insieme) di vincoli in IA o in PA, è possibie calcolare una rete path-consistente equivalente in tempo $O(n^3)$ ($n$ = numero di variabli).

- *Un algoritmo per calcolare la path-consistenza è sufficiente a decidere la consistenza per PA, SIA e ORD-Horn: l'insieme di input è inconsistente se e solo se viene generata la relazione vuota.*

**Algoritmo Path-Consistency**$(C)$

*Input*: una matrice $C$ che rappresenta una rete con $n$ var.

*Output*: una rete PC equivalente a $C$, oppure *false*.

```
1.  L ← {(i, j) | 1 ≤ i < j ≤ n}
2.  while (L is not empty) do
3.      select and delete an item (i, j) from L
4.      for k ← 1 to n, k ≠ i and k ≠ j, do
5.          t ← R_ik ∩ R_ij ∘ R_jk
6.          if t is the empty relation then
7.              return false
8.          else
9.              if t ≠ R_ik then
10.                 R_ik ← t
11.                 R_ki ←Inverse(t)
12.                 L ← L ∪ {(i, k)}
13.             t ← R_kj ∩ R_ki ∘ R_ij
14.             if t is the empty relation then
15.                 return false
16.             else
17.                 if t ≠ R_kj then
18.                     R_kj ← t
19.                     R_jk ←Inverse(t)
20.                     L ← L ∪ {(k, j)}
21.  return C
```

$R_{ij}$ = relazione tra la $i$-esima var e la $j$-esima var, memorizzate in $C[i, j]$ of $C$. Inverse = operazione di inverso.

# Consistenza per relazioni in IA

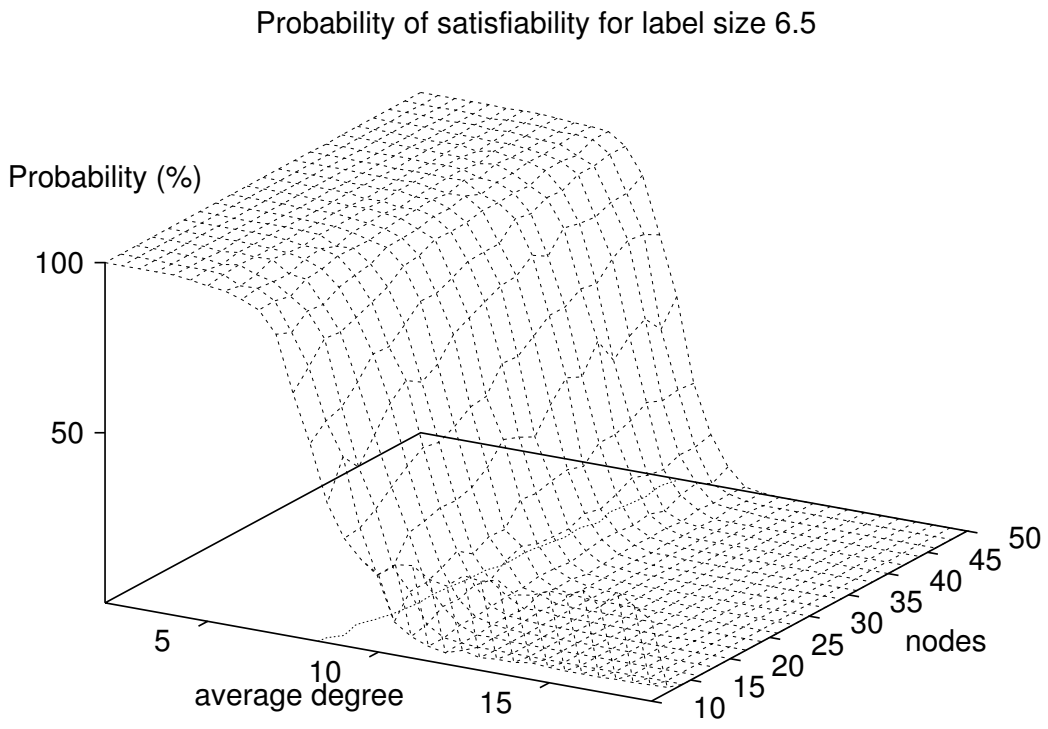
**Algoritmo IA-consistency**($C$)

*Input*: Una matrice $C$ che rappresenta un insieme $\Theta$ di vincoli

*Output*: *true* if $\Theta$ is consistente, *false* altrimenti

1. $C \leftarrow$ path-consistency($C$)
2. **if** $C =$ *false* **then**
3. **return** *false*
4. **else** scegli una relazione $C[i, j]$ non processata e
5. dividi $C[i, j]$ in $R_1, \ldots, R_k$ tale che $R_l \in Split$ $(1 \leq l \leq k)$
6. **if** nessuna relazione puo' essere divisa **then**
7. **return** *true*
8. **for** $l \leftarrow 1$ **to** $k$ **do**
9. $C_{ij} \leftarrow R_l$
10. **if** IA-consistency($C$) **then**
11. **return** *true*
12. **return** *false*

$Split$ = sottoinsieme di relazioni "trattabili" (polinomiali) in IA (ad es., SIA o ORD-Horn).

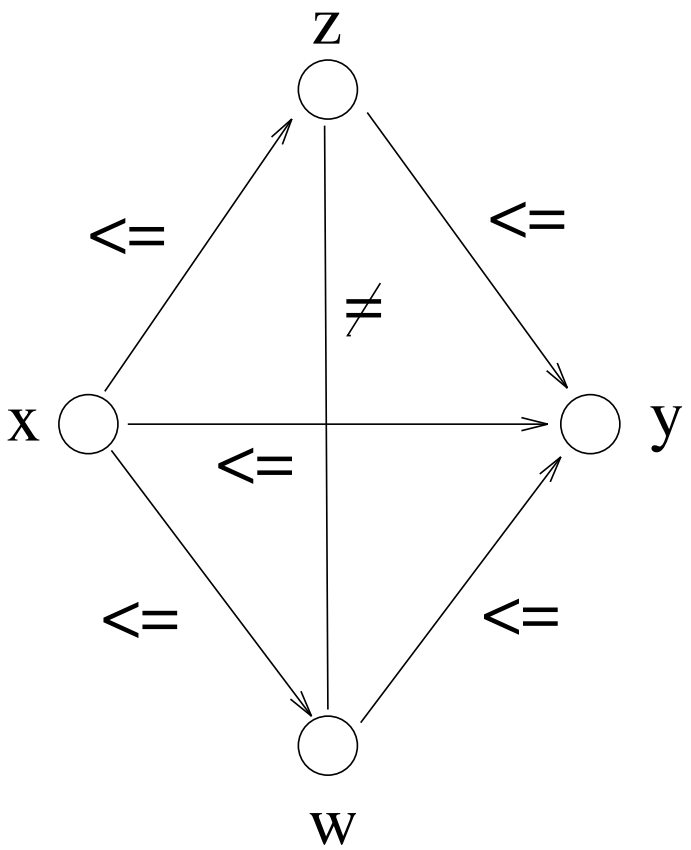



Nebel's Phase transition of ISAT for IA when the label size is 6.5

# Rete Minima per PA

Una rete di vincoli in PA che è path-consistente é consistente, ma *non è minima*.

**Teorema:** *Se una rete path-consistente di vincoli in PA non è minima, allora contine almeno un* **grafo proibito**.




La rete non è minima perchè $x = y$ non è possibile: $x \leq y$ deve essere $x < y$.

# Eliminazione Grafi Proibiti

**Algoritmo Elimina-Grafi-Proibiti**$(C)$

*Input: una matrice C che rappresenta una rete path-consistente*

*Output: una matrice che rappresenta una rete minima equivalente a* $C$

1. **Per ogni** arco $(v, w)$ tale che $w \in adj_{\neq}(v)$ **do**
2. $\quad S \leftarrow (adj_{\geq}(v) \cap adj_{\geq}(w))$
3. $\quad T \leftarrow (adj_{\leq}(v) \cap adj_{\leq}(w))$
4. $\quad$ **Per ogni** $s \in S$, $t \in T$ **do**
5. $\quad\quad C[s,t] \leftarrow$ " $<$"
6. $\quad\quad C[t,s] \leftarrow$ " $>$"

$adj_R(v) = \{t \mid C[v,t] = R\}$

# Esempio Relazioni Temporali Quantitative

- La durata del viaggio dei treni T1 e T2 deve essere inferiore a 48 ore;

- Il viaggio di T1 da C1 a S1 dura 6-8 ore; il viaggio di T2 da S1 a C1 dura 6-8 ore.

- Il viaggio di T1 da S1 S2 dura 8-12 ore; il viaggio di T2 da S2 a S1 dura 8-12 ore.

- Il viaggio di T1 da S2 a C2 dura 14-20 ore; il viaggio di T2 da C2 a S2 dura 14-20 ore.

- T1 e T2 si fermano a ciscuna stazione per almeno 2 ore.

- T1 ha lasciato C1 alle 24:00 del 11/12/97. Si è fermato a S1 per 6 ore, ed è arrivato a C2 alle 16:00 del 12/12/97. T2 ha lasciato C2 alle 11:00 del 10/12/97, si è fermato 3 ore a S2 e 4 ore a S1, ed ha impiegato 9 ore per raggiungere C1 da S2.

# Esempio (continuazione)

Esempi di interrogazioni che richiedono ragionamento:

- Le informazioni temporali sono consistenti ?
- Quali sono i possibili tempi di arrivo di T2 a C1?
- Quanto tempo ha impiegato T1 per andare da S2 a C2 ?
- T2 é arrivato a C2 prima che T1 fosse arrivato a C1 ?
- È possibile che T2 non fosse ancora arrivato a S1 alle 14:00 del 11/12/97 ?

# Approccio di Dechter Meiri & Pearl (1990)

Vincoli sulle *distanze temporali*

$$y - x \in \{I_1, I_2, ..., I_n\} \equiv$$

$$y - x \in I_i \ \vee \ y - x \in I_2 \ \vee ... \vee \ y - x \in I_n$$

$I_i = [min_i, max_i] \rightarrow y - x \in I_i \equiv min_i \leq y - x \leq max_i$

Se $n = 1$ i vincoli sono *semplici* e formano un *Simple Temporal Constrant Satisfaction Problem* (**STP**).

**Alcune estensioni**

*Intervalli aperti*: ad es. $y - x \in (1, 10]$

*inclusione di* $\neq$:

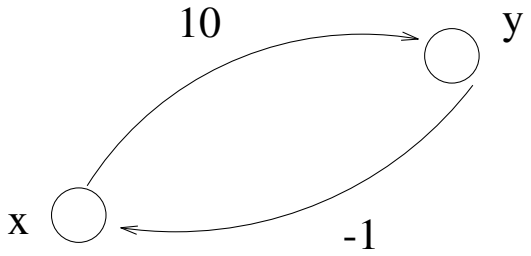
$y - x \in [1, 10] - \{5, 7\} \equiv y - x \in \{[1, 5), (5, 7), (7, 10]\}$

# Grafo delle Distanze

Un STP S può essere rappresentato da un grafo delle distanze (GD): se $y - x \in I$ è in S, allora

- $x$ e $y$ sono vertici di GD;
- GD consiene un arco da $x$ a $y$ con etichetta $I^+$ (l'estremo superiore di $I$);
- GD contine un arco da $y$ a $x$ con etichetta $I^-$ (l'estremo inferiore di $I$).

**Esempio** (rappresentazione di $y - x \in [1, 10]$)




**Teorema:** *Un STP S é consistente se e solo se il grafo delle distanze di S non contiene cicli negativi (la cui somma delle etichette è un valore negativo).*

# Algoritmi per STP

- Gli agoritmi di *Bellman-Ford* e di *Floyd-Warshall* sono completi per determinare la consistenza di un STP e richiedono tempo cubico ($O(n^3) - n$ = numero variabili).

- **Bellman-Ford** = algoritmo per calcolare i cammini più brevi tra un vertice e tutti gli altri di un DG.

- **Floyd-Warshall** = algoritmo per calcolare i percorsi più brevi tra tutte le coppie di vertici di un DG.

- Bellman-Ford è più efficiente dal punto di vista spaziale (complessità $O(e) - e$ = numero di vincoli in input).

- Floyd-Warshall pùo essere usato per calcolare la rete minima.

# Floyd-Warshall

(all-pairs-shortest-paths)

1. FOR $i = 1$ TO $n$ DO $D_{ii} \leftarrow 0$;
2. FOR $i, j = 1$ TO $n$ DO $D_{ij} \leftarrow a_{ij}$;
3. FOR $k = 1$ TO $n$ DO
4. FOR $i, j = 1$ to $n$ DO
5. $D_{ij} \leftarrow min\{D_{ij}, D_{ik} + D_{kj}\}$

$a_{ij}$ = etichetta sull'arco da $i$ a $j$ ne grafo delle distanze.

Se tra $i$ e $j$ non c'é arco, si assume un arco con etichetta "infinito".

Per ogni $x, y$ vale $-\infty \leq y - x \leq +\infty$

$D_{ij}$ rappresentato con una matrice.

# Disjunctive Temporal Problems

A **DTP** (Stergiou & Koubarakis) is a pair $\langle \mathcal{P}, \mathcal{C} \rangle$, where

- $\mathcal{P}$ is a set of time point variables over $\mathbb{R}$
- $\mathcal{C}$ is a set of disjunctive constraints $c_1 \vee \cdots \vee c_n$ such that
  - $c_i$ is of form $y_i - x_i \leq k_i$,
  - $x_i, y_i \in \mathcal{P}$ and $k_i \in \mathbb{R}$ (for $i = 1...n$).

**Reasoning problems**:

- *Decide satisfiability* (all constraints can be satisfied)
- *Find a solution* (consistent interpretation of the variables)
- *Find an optimal solution* (lowest time for the one/all variables)

In general NP-hard, but polynomial with unary constraints (**STPs**)

# DTP and "Meta CSP"

Finding a solution for a DTP $\Rightarrow$ solving a meta CSP:

- *Meta variables*: constraints of the DTP
- *Meta variable values*: constraint disjuncts
- *Implicit meta constraint*: the values (constraint disjuncts) of the meta variables form a satisfiable STP

Solution of the meta CSP = consistent STP with exactly one disjunct for each constraint in the original DTP

In general, NP-hard task solvable by a *backtracking algorithm*.

# Backtracking Algorithm

*Input*: The set $X$ of meta-variables in the meta CSP of a DTP, a partial solution $S$ of the meta CSP;

*Output*: Either a solution of the meta CSP or *fail*.

1. **if** $X = \emptyset$ **then stop** and **return** $S$;
2. $x \leftarrow$ SelectVariable($X$); $X' \leftarrow X - \{x\}$;
3. **while** $D(x) \neq \emptyset$ **do**
4. $d \leftarrow$ SelectValue($D(x)$);
5. $S' \leftarrow S \cup \{x \leftarrow d\}$; $D(x) \leftarrow D(x) - \{d\}$;
6. $D'(x) \leftarrow D(x)$; /* Saving the domain values */
7. **if** ForwardCheck-DTP($X', S'$) **then**
8. Solve-DTP($X', S'$);
9. $D(x) \leftarrow D'(x)$; /* Restoring the domain values */
10. **return** *fail*; /* backtracking */

ForwardCheck-DTP($X, S$)

*Input*: The set $X$ of meta-variables, a (partial) solution $S$;

*Output*: Either *true* or *false*.

1. **forall** $x \in X$ **do**
2. **forall** $d \in D(x)$ **do**
3. **if** *not* Consistency-STP($S \cup \{x \leftarrow d\}$) **then**
4. $D(x) \leftarrow D(x) - \{d\}$;
5. **if** $D(x) = \emptyset$ **then return** *false*; /* dead-end */
6. **return** *true*.